# Une borne effective sur l’écart entre les points de contrôle et le graphe d’un polynôme réel sur un simplexe.

Richard Leroy

# Une borne effective sur l'écart entre les points de contrôle et le graphe d'un polynôme réel sur un simplexe.

Richard Leroy

*IRMAR, Université Rennes 1*

**Résumé**

On donne dans cette note un résultat quantitatif concernant les coefficients d'un polynôme réel exprimé dans la base de Bernstein associée à un simplexe. Il s'agit d'établir une borne explicite sur l'écart entre ces coefficients et le graphe du polynôme. Cette borne généralise les résultats connus en dimensions 1 et 2.

**Abstract**

**An effective bound on the gap between the control points and the graph of a real polynomial on a simplex.** We state a quantitative result concerning the coefficients of a real polynomial, expressed in the Bernstein basis with respect to a simplex. We provide an explicit bound on the gap between these coefficients and the graph of the considered polynomial. This generalizes known results in dimensions 1 and 2.

## Abridged English version

Let $k \geq 1$ be a positive integer, and $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$ be a real polynomial of degree $d$. Let $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ denote the standard simplex $\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k_{\geq 0} \mid \sum x_i \leq 1\}$.
For every multi-index $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}_{\geq 0}$, $|\alpha|$ stands for $\alpha_0 + \ldots + \alpha_k$, and if $|\alpha| = d$, $N_\alpha$ denotes the point $(\alpha_1/d, \ldots, \alpha_k/d) \in \Delta$.

$f$ can be expressed in the Bernstein basis of degree $d$ associated to $\Delta$:

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha B^d_\alpha,$$

where the Bernstein polynomials of degree $d$ are defined as follows:

$$B^d_\alpha(X_1, \ldots, X_k) = \frac{d!}{\alpha_0! \cdots \alpha_k!} (1 - X_1 - \ldots - X_k)^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k}.$$

*Email address:* `richard.leroy@ens-cachan.org` (Richard Leroy).

Our main result is the following bound on the gap between the Bernstein coefficients $b_\alpha$ and the graph of $f$:

$$\max_{|\alpha|=d} |f(N_\alpha) - b_\alpha| \leq \frac{dk(k+2)}{24} \max_{\substack{|\gamma|=d-2 \\ 0\leq i<j\leq k}} |b_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}} - b_{\gamma+e_i+e_j}|,$$

where $(e_0, \ldots, e_k)$ denotes the standard basis of $\mathbb{R}^{k+1}$ (with the convention $e_{-1} = e_k$).

We now sketch the proof. Using a convexity argument and after rescaling, it turns out that in this view, the worse case is achieved by a unique quadratic form, for which all the quantities $b_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}} - b_{\gamma+e_i+e_j}$ are equal to 1. The study of the gap in this particular case is easy, and leads to the result.

*Remark 1 Note that the result also holds for any simplex of* $\mathbb{R}^k$ *(one just need to apply an ad hoc affine transformation).*

## 1. Introduction

Les polynômes de Bernstein sont fréquemment utilisés en modélisation et en conception assistées par ordinateur, du fait de leurs remarquables propriétés géométriques. Par exemple, les coefficients de Bernstein approchent les polynômes qu'ils représentent. La propriété de l'enveloppe convexe ([6]) donne une première estimation quantitative de cette approximation. Dans [1] puis [4], les auteurs améliorent l'estimation de l'approximation. Toutefois, les bornes obtenues ne sont pas optimales, et sont difficilement calculables. Plus récemment, dans [5], les auteurs obtiennent une borne précise et simple pour le cas univarié. Reif ([7]) simplifie et généralise la preuve au cas bivarié. Le but de cette note est d'élargir ce résultat en dimension quelconque, dans le cadre des polynômes de Bernstein associés à un simplexe.

## 2. Base de Bernstein

Soit $k \geq 1$ un entier, et $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$ un polynôme réel de degré $d$, que l'on étudie sur le simplexe standard $\Delta = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k \mid \sum x_i \leq 1\}$. Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :

**Notation** 2.1 *Pour tout multi-indice* $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$*, on notera* $|\alpha|$ *la somme de ses composantes* $\alpha_0 + \ldots + \alpha_k$*, et si* $|\alpha| = d$*,* $N_\alpha^d$ *désignera le point* $(\alpha_1/d, \ldots, \alpha_k/d) \in \Delta$*.*

On définit maintenant les polynômes de Bernstein de degré $d$ associés à $\Delta$.

**Définition** 2.2 *La famille* $\left(B_\alpha^d\right)_{|\alpha|=d}$ *des polynômes de Bernstein de degré d associée à* $\Delta$ *est définie par*

$$B_\alpha^d(X_1, \ldots, X_k) = \frac{d!}{\alpha_0! \cdots \alpha_k!} (1 - X_1 - \ldots - X_k)^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k}.$$

Cette famille forme une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $d$. Ainsi, $f$ s'exprime de manière unique sous la forme

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha(f, d, \Delta) B_\alpha^d,$$

où les $b_\alpha(f,d,\Delta)$ sont appelés coefficients de Bernstein de $f$ (de degré $d$, sur $\Delta$). Notons que l'on peut exprimer tout polynôme de degré $d$ dans les bases de Bernstein de degré $D$ pour tout $D \geq d$.

*Exemple 1 (Précision affine) Si $d \leq 1 \leq D$, alors pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ vérifiant $|\alpha| = D$, on a : $b_\alpha(f,D,\Delta) = f(N_\alpha^D)$.*

*Exemple 2 (Coefficients de Bernstein d'une forme quadratique) Soit $q(X_1,\ldots,X_k)$ une forme quadratique de matrice associée $M = (m_{ij})_{1\leq i,j,\leq k}$, et $D \geq 2$. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_k)$ vérifiant $|\alpha| = D$, on a :*

$$b_\alpha(q,D,\Delta) = \frac{1}{D(D-1)}\left[q(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) - \sum_{i=1}^{k} m_{ii}\alpha_i\right].$$

## 3. Résultat principal

On définit maintenant les objets que l'on cherche à comparer :

**Définition** 3.1 *Le graphe discret de $f$ de degré $d$ est constitué des points $\left(N_\alpha^d, f(N_\alpha^d)\right)$, $|\alpha| = d$. Les points de contrôle de degré $d$ associés à $f$ sont les points $(N_\alpha^d, b_\alpha(f,d,\Delta))$, $|\alpha| = d$.*

*Remarque 1 Si $d \leq 1$ , alors ces deux notions sont identiques par précision affine. On suppose par la suite $d \geq 2$.*

Généralisant les travaux de [5] et [7], le but de cette section est l'obtention d'une borne sur l'écart entre les points de contrôle et le graphe discret d'un polynôme réel en termes de différences secondes.

**Définition** 3.2 *Notons $(e_0,\ldots,e_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$ (avec la convention $e_{-1} = e_k$). On appelle différences secondes de degré $d$, et on note $\Delta^2 b_{\gamma,i,j}(f,d,\Delta)$, les quantités*

$$\Delta^2 b_{\gamma,i,j}(f,d,\Delta) = b_{\gamma+e_i+e_{j-1}}(f,d,\Delta) + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j}(f,d,\Delta) - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}}(f,d,\Delta) - b_{\gamma+e_i+e_j}(f,d,\Delta),$$

*où $|\gamma| = d-2$ et $0 \leq i < j \leq k$.*

*Exemple 3 Soit $q(X_1,\ldots,X_k)$ une forme quadratique de matrice associée $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}$. Puisque $d \geq 2$, on peut exprimer $q$ dans la base de Bernstein de degré $d$ associée à $\Delta$. Pour tout $|\gamma| = d-2$ et $0 \leq i < j \leq k$, on a alors :*

$$\Delta^2 b_{\gamma,i,j}(q,d,\Delta) = \frac{2}{d(d-1)}\left(m_{i-1,j} + m_{i,j-1} - m_{i,j} - m_{i-1,j-1}\right),$$

*avec les conventions $m_{0,j} = m_{i,0} = 0$, $m_{-1,j} = m_{k,j}$ et $m_{-1,-1} = m_{k,k}$.*

On introduit les notations suivantes :

**Notation** 3.3 *On note $\Delta^2 b(f,d,\Delta)$ le vecteur des différences secondes (dans un ordre quelconque) :*

$$\Delta^2 b(f,d,\Delta) = \left(\Delta^2 b_{\gamma,i,j}(f,d,\Delta)\right)_{\substack{|\gamma|=d-2\\ 0\leq i<j\leq k}}.$$

*On désigne par* $\|\Delta_2 b(f,d,\Delta)\|_\infty$ *sa norme infinie :* $\|\Delta_2 b(f,d,\Delta)\|_\infty = \max_{\substack{|\gamma|=d-2 \\ 0\le i<j\le k}} |\Delta^2 b_{\gamma,i,j}(f,d,\Delta)|$.

L'exemple suivant est fondamental pour la suite :

*Exemple 4 Soit* $q_d(X_1,\dots,X_k)$ *la forme quadratique associée à la matrice* $N = \frac{d(d-1)}{2}M$, *où* $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le k}$ *est la matrice symétrique définie par* $m_{i,j} = i(k-j+1)$ *si* $i \le j$.
*Alors* $\Delta^2 b(q_d,d,\Delta) = (1,\dots,1)$.

*Remarque 2 La matrice* $M$ *définie dans l'exemple précédent est définie positive (et donc la forme quadratique* $q_d$ *l'est également). En effet, si* $P$ *désigne la matrice dont la diagonale est formée de* 1 *et la surdiagonale est formée de* $-1$, *alors* ${}^tPMP = (k+1)I - J$, *où* $I$ *désigne la matrice identité et* $J$ *la matrice dont les éléments valent tous* 1. *La matrice* $(k+1)I-J$ *étant classiquement définie positive,* $M$ *l'est également.*

Le résultat principal de cette note s'énonce ainsi :

**Théorème 3.4** *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\max_{|\alpha|=d} \left| f\left(N_\alpha^d\right) - b_\alpha(f,d,\Delta)\right| \le \frac{dk(k+2)}{24} \|\Delta_2 b(f,d,\Delta)\|_\infty .$$

*Remarque 3 Pour* $k=1$ *on retrouve la borne en* $(d/8)\|\Delta_2 b(f,d,\Delta)\|_\infty$ *obtenue dans [5].*
*Pour* $k=2$, *on retrouve la borne en* $(d/3)\|\Delta_2 b(f,d,\Delta)\|_\infty$ *obtenue dans [7].*

## 4. Résumé de la démonstration

### 4.1. *Polytope de contrôle et convexité*

Contrastant avec le caractère discret du théorème 3.4, la preuve fait intervenir la notion continue de polytope de contrôle, et l'étude de son éventuelle convexité. En dimension 1, il s'agit de la ligne brisée joignant les points de contrôle. En dimension supérieure, sa définition nécessite de choisir une triangulation du simplexe $\Delta$. Nous travaillons ici avec la triangulation standard introduite dans [3].

**Définition** 4.1 *Le polytope de contrôle associé à* $f$ *est l'unique fonction* $\hat{f}$ *continue, affine sur chaque simplexe de la triangulation standard de* $\Delta$ *et vérifiant la propriété d'interpolation :*

$$\forall |\alpha| = d,\ \hat{f}(N_\alpha^d) = b_\alpha(f,d,\Delta).$$

Le résultat suivant (obtenu dans [3] et basé sur les travaux de [2]) caractérise la convexité du polytope de contrôle à l'aide des différences secondes :

**Théorème 4.2** *Le polytope de contrôle* $\hat{f}$ *est convexe si et seulement si* $\Delta_2 b(f,d,\Delta) \le 0$ *(où l'inégalité s'entend composante par composante).*

### 4.2. *Preuve du résultat principal*

Par précision affine, le théorème 3.4 est évident si $d \le 1$. On suppose désormais $d \ge 2$.

On montre tout d'abord que le cas le pire est atteint pour la forme quadratique $q_d$ définie dans l'exemple 4 :

**Lemme 4.3** $\quad \forall |\alpha| = d, \ \left| \left(f - \hat{f}\right)(N_\alpha^d) \right| \leq (q_d - \hat{q_d})(N_\alpha^d) \left\| \Delta^2 b(f, d, \Delta) \right\|_\infty .$

*Preuve :*
Soit $\alpha$ un multi-indice vérifiant $|\alpha| = d$.
∘ Puisque le degré de $f$ vérifie $d \geq 2$, on a $\left\| \Delta^2 b(f, d, \Delta) \right\|_\infty \neq 0$. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $f$ est normalisé de telle sorte que l'on ait $\left\| \Delta^2 b(f, d, \Delta) \right\|_\infty = 1$.
∘ Soit $q_d$ la forme quadratique donnée dans l'exemple 4 vérifiant $\Delta^2 b(q_d, d, \Delta) = (1, \ldots, 1)$. On a alors $\Delta^2 b(q_d + f, d, \Delta) \geq 0$, donc le polygône de contrôle de $q_d + f$ est convexe. Notant $g$ la fonction $q_d + f$, on a alors :

$$g(N_\alpha^d) = \sum_{|\beta|=d} b_\beta(g, d, \Delta) B_\beta^d(N_\alpha^d) = \sum_{|\beta|=d} \hat{g}(N_\beta^d) B_\beta^d(N_\alpha^d) \geq \hat{g}\left( \sum_{|\beta|=d} B_\beta^d(N_\alpha^d) N_\beta \right),$$

la dernière inégalité étant une conséquence de la convexité de $\hat{g}$.

La propriété de précision affine implique que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $X_i = \sum_{|\beta|=d} \frac{\beta_i}{d} B_\beta^d(X_1, \ldots, X_k)$. Par conséquent, $\sum_{|\beta|=d} B_\beta^d(N_\alpha^d) N_\beta^d = N_\alpha^d$, et l'on obtient donc la majoration $g(N_\alpha^d) \geq \hat{g}(N_\alpha^d)$, soit :

$$(q_d - \hat{q_d})(N_\alpha^d) \geq -\left(f - \hat{f}\right)(N_\alpha^d).$$

En considérant la fonction $q_d - f$, on montre de même que $(q_d - \hat{q_d})(N_\alpha^d) \geq \left(f - \hat{f}\right)(N_\alpha^d)$. Finalement, on obtient bien la majoration souhaitée. □

Il reste à démontrer le lemme suivant :

**Lemme 4.4** *Soit $q_d \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$ la forme quadratique de l'exemple 4. Alors :*

$$\max_{|\alpha|=d} (q_d - \hat{q_d})\left(N_\alpha^d\right) \leq \frac{dk(k+2)}{24}.$$

*Preuve :*
On considère les quantités $q_d\left(N_\alpha^d\right) - b_\alpha(q_d, d, \Delta)$ pour $|\alpha| = d$. D'après l'exemple 2, ces quantités valent :

$$q_d\left(N_\alpha^d\right) - b_\alpha(q_d, d, \Delta) = \left(-\frac{1}{2d}\right)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) M \ {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k m_{ii}\alpha_i.$$

On définit l'application $h$ sur $\mathbb{R}^k$ par :

$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \left(-\frac{1}{2d}\right)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) M \ {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k m_{ii}\alpha_i.$$

$h$ est une application de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^k$ vers $\mathbb{R}$, dont la matrice hessienne, $\frac{-1}{d}M$, est définie négative d'après la remarque 2. Ainsi, $h$ est strictement concave. Son gradient est nul au point $\left(\frac{d}{k+1}, \ldots, \frac{d}{k+1}\right)$, et

$h\left(\frac{d}{k+1}, \dots, \frac{d}{k+1}\right) = \frac{dk(k+2)}{24}$ est donc l'unique maximum global de $h$ par stricte concavité. $\square$

Combinant les lemmes précédents, on obtient immédiatement le théorème 3.4.

*Remarque 4 La borne du théorème 3.4 est atteinte pour la forme quadratique* $q_d$ *de l'exemple 4, vue comme polynôme de degré* $d$.

*Remarque 5 La preuve du théorème 3.4 nécessite le choix d'une triangulation particulière de* $\Delta$ *(appelée triangulation standard dans [3]). Cependant, l'énoncé du théorème ne concerne que les coefficients de Bernstein de* $f$*, indépendemment du choix d'une triangulation de* $\Delta$.

*Remarque 6 Le théorème 3.4 se généralise immédiatement à un simplexe quelconque par transformation affine.*

## Références


[1] E. Cohen, L.L. Schumacher, Rates of convergence of control polygons, Computer Aided Geom. Design 2, 1985, 229-235

[2] W. Dahmen, C.A. Micchelli, Convexity of multivariate Bernstein polynomials and box spline surfaces, Stud. Sci. Hung. 23, 1988, 265-287

[3] T. Goodman, J. Peters, Bézier nets, convexity and subdivision on higher-dimensional simplices, Computer Aided Geom. Design 12 (1), 1995, 53-65

[4] L. Kobbelt, H. Prautzsch, Convergence of subdivision and degree elevation, Adv. Comp. Mat. 2, 1004, 143-154

[5] D. Nairn, J. Peters, D. Lutterkort, Sharp, quantitative bounds on the distance between a polynomial piece and its Bézier control polygon, Computer Aided Geom. Design 16 (7), 1999, 613-631

[6] H. Prautzsch , W. Boehm , M. Paluszny, Bezier and B-Spline Techniques, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ (2002)

[7] U. Reif, Best bounds on the approximation of polynomials and splines by their control structure, Computer Aided Geom. Design 167 (6) , 2000, 579-589